Soluzioni dei problemi della maturità scientifica A.S. 2011/2012

Nicola Gigli* Sunra J.N. Mosconi†

21 giugno 2012

Problema 1

1. Per determinare il periodo di g occorre determinare il più piccolo $T > 0$ per cui valga, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi(x+T)\right) = \sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right).$$

Essendo la funzione $y = \sin z$ periodica di periodo 2π si ha

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi(x+T)\right) = \sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{3}{2}\pi(x+T) = \frac{3}{2}\pi x + 2k\pi$$

per un qualche $k \in \mathbb{Z}$. Risolvendo in T si ottiene $\frac{3}{2}\pi T = 2k\pi$, che ha come più piccolo valore positivo $T = \frac{4}{3}$ corrispondente a $k = 1$.

Passiamo allo studio delle funzioni. Per quel che riguarda f, osserviamo che risulta continua e ben definita per tutti i valori reali. Essa è inoltre una funzione pari, in quanto composizione di una funzione pari e una dispari. Quindi basta studiarla nel semiasse delle ascisse nonnegative, dove vale $f(x) = 27x^3$ (essendo il grafico su $x \leq 0$ il simmetrico rispetto all'asse y di quello nel semiasse $x \geq 0$). Il limite a $+\infty$ è $+\infty$ (e quindi anche quello a $-\infty$, per parità) e la funzione si annulla solo in $x = 0$. Ricordiamo poi che se f è una funzione pari, nei punti $x < 0$ ove è n volte derivabile vale

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n f^{(n)}(-x),$$

*Università di Nizza
†Università di Catania

relazione che fornisce il valore delle derivate nel semiasse delle ascisse negative, una volta noto quello nel semiasse delle ascisse positive. Si ha quindi, sempre per $x > 0$

$$f'(x) = 81x^2 > 0 \quad \forall x > 0 \quad \text{e} \quad f''(x) = 162x > 0 \quad \forall x > 0,$$

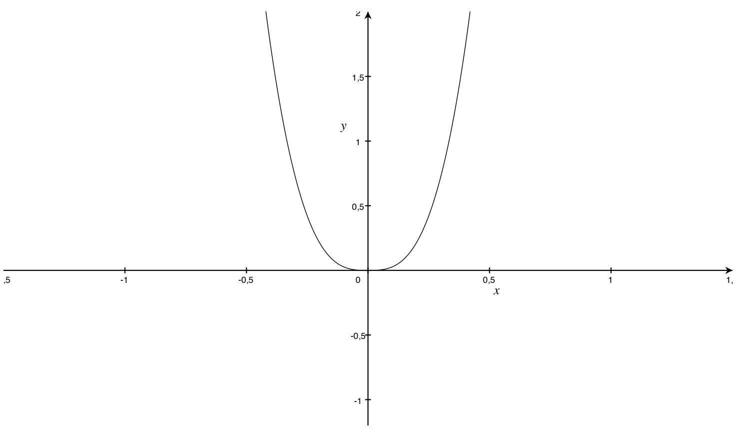
da cui si deduce

$$f' = -81x^2 < 0 \quad \forall x < 0 \quad \text{e} \quad f''(x) = -162x > 0 \quad \forall x < 0.$$

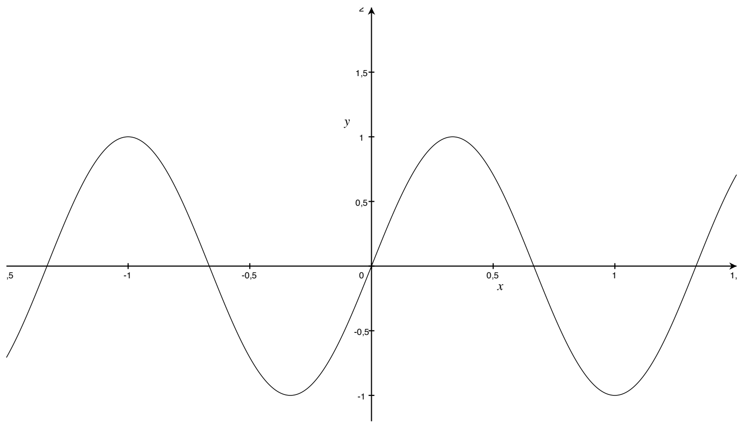
Poichè i limiti destro e sinistro della derivata seconda in 0 coincidono, f è derivabile due volte in zero. Essa è inoltre decrescente per $x < 0$, crescente per $x > 0$ e convessa (non vi sono flessi in quanto la derivata seconda è *ovunque* non negativa). Si osservi che f non possiede derivata terza in $x = 0$, in quanto, sapendo che $f''(0) = 0$, si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f''(x) - f''(0)}{x} = 162 \neq -162 = \lim_{x\to 0^-} \frac{f''(x) - f''(0)}{x}.$$

Il grafico di f è riportato nella figura seguente.

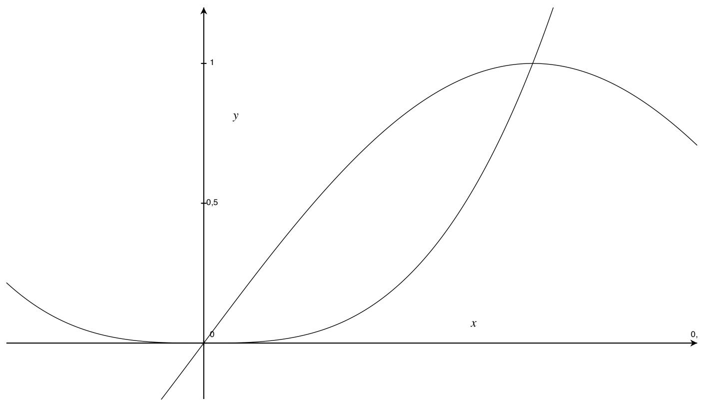


Per quel che riguarda il grafico di g, esso è ottenuto dal grafico di $y = \sin z$ mediante un'omotetia sulle ascisse di centro 0 e di ragione $\frac{2}{3\pi}$. Il suo grafico è quindi simile (nel senso omotetico) a quello della funzione $y = \sin z$: la funzione è crescente in $[0, \frac{1}{3}] \cup [1, \frac{4}{3}]$ e decrescente altrimenti, è concava in $[0, \frac{2}{3}]$ e convessa altrimenti, presenta un massimo in $(\frac{1}{3}, 1)$, un minimo in $x = (1, -1)$ e un flesso in $(\frac{2}{3}, 0)$ (l'altro essendo in $(0, 0)$ o $(\frac{4}{3}, 0)$, contando la periodicità). Il suo grafico è rappresentato in figura.



2. Ricordando la formula della retta tangente a f nel punto $(x_0, f(x_0))$:
$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0),$$
si ha
$$r : y = 9(x - \frac{1}{3}) + 1, \qquad s : y = 0(x - \frac{1}{3}) + 1.$$
Essendo s una retta parallela all'asse x, l'angolo acuto fra r e s è lo stesso che r forma con l'asse delle ascisse. Il coefficiente angolare di r è la tangente dell'angolo che essa forma con l'asse delle x e quindi l'angolo cercato α soddisfa (in radianti) $\tan \alpha = 9$. Si ha allora
$$\alpha = \arctan 9 \simeq 1,46 \; rad \quad \Rightarrow \quad \alpha \simeq \frac{360}{2\pi} 1,46 \simeq 83^\circ \; 66'.$$

3. Determiniamo i punti d'intersezione fra G_f e G_g. Si ha $g(0) = 0 = f(0)$ e in $x = \frac{1}{3}$ si ha $g(x) = 1 = f(x)$ e quindi G_f e G_g si intersecano in $(0, 0)$ e in $(\frac{1}{3}, 1)$. Poichè g è strettamente concava nell'intervallo $(0, \frac{1}{3})$ e f strettamente convessa, le funzioni non possono intersecarsi ulteriormente nell'intervallo $(0, \frac{1}{3})$. Non vi sono ulteriori intersezioni neanche per $x > \frac{1}{3}$ in quanto, essendo f strettamente crescente sul semiasse positivo delle x,
$$g(x) \leq 1 < f(x) \qquad \forall x > \frac{1}{3}.$$
Infine non vi sono intersezioni nel semiasse negativo delle x: in $(-\frac{2}{3}, 0)$ vale infatti $g(x) < 0 < f(x)$, mentre per $x \leq -\frac{2}{3}$ vale $g(x) \leq 1 < 8 = f(-\frac{2}{3}) \leq f(x)$. Quindi la *regione finita* di piano R delimitata da G_f e G_g, rappresentata in figura, ha ascisse comprese fra 0 e $\frac{1}{3}$, e nell'intervallo $[0, \frac{1}{3}]$ vale $f(x) \geq g(x)$.



La sua area si calcola perciò come

$$\text{Area}(R) = \int_0^3 g(x) - f(x)dx = -2\,\frac{\cos\left(\frac{3}{2}\pi x\right)}{3\pi} - \frac{27}{4}x^4\Bigg|_0^{\frac{1}{3}}$$
$$= \frac{2}{3\pi} - \frac{1}{12} \simeq 0,129.$$

4. Il volume delle due regioni si calcola mediante il metodo degli indivisibili: lo mostriamo per il solido S, essendo l'argomento analogo per il solido T. La sezione $S(x)$ di S mediante un piano ortogonale all'asse delle ascisse e passante per x è una corona circolare di raggio esterno $g(x)$ e raggio interno $f(x)$. La sua area è data quindi dalla differenza delle aree dei cerchi di raggio rispettivamente $g(x)$ e $f(x)$, ossia

$$\text{Area}(S(x)) = \pi(g^2(x) - f^2(x)).$$

Il metodo degli indivisibili garantisce allora che il volume di S sia

$$\text{Volume}(S) = \pi\int_0^{\frac{1}{3}}(g^2(x) - f^2(x))dx = \pi\int_0^{\frac{1}{3}}\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi x\right) - 729x^6dx.$$

Per il calcolo del volume di T occorre determinare l'espressione dell'area delle sezioni $T(y)$ in funzione di y. A tale scopo invertiamo le funzioni nell'intervallo $[0, \frac{1}{3}]$, ottenendo

$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y) = \frac{\sqrt[3]{y}}{3}$$
$$g(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = g^{-1}(y) = \frac{2}{3\pi}\arcsin y,$$

da cui, osservando che

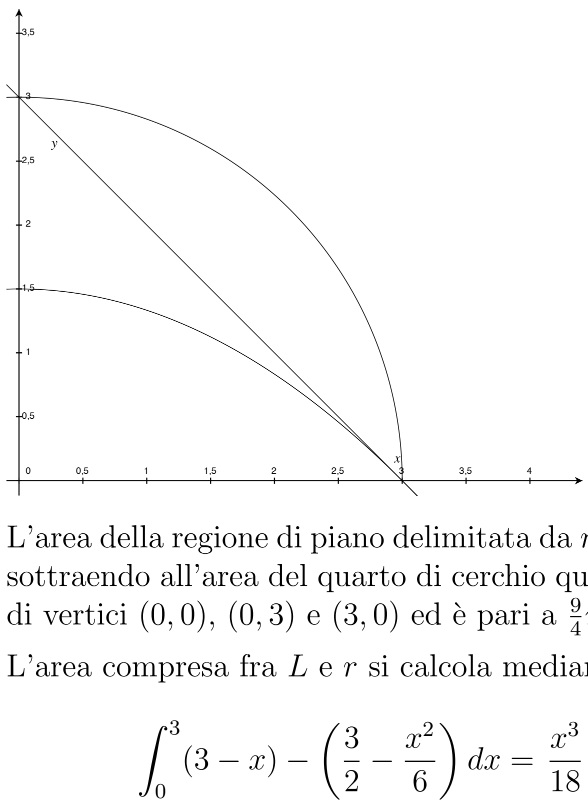
$$x \in [0, \frac{1}{3}] \quad \Leftrightarrow \quad f(x), g(x) \in [0, 1],$$
$$f(x) \le g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(y) \ge g^{-1}(y),$$

si ottiene

$$\text{Volume}(T) = \pi \int_0^1 \frac{\sqrt[3]{y^2}}{9} - \frac{4}{9\pi^2}(\arcsin y)^2 dy.$$

Problema 2

1. Osserviamo che L è descritto dalla relazione $y = \frac{3}{2} - \frac{x^2}{6} =: f(x)$, e studiamo $f(x)$. Essa è una parabola di vertice $(0, \frac{3}{2})$, con la concavità rivolta verso il basso e quindi una funzione strettamente concava. La sua retta tangente in $x = 3$ ha equazione $y = r(x) = 3 - x$ e interseca l'arco di circonferenza solo in A e in B. Essendo f concava, essa è dominata da ogni sua retta tangente; quindi, valendo in $[0, 3)$ $f(x) < r(x)$, L interseca r (e quindi anche l'arco di circonferenza) solo in A. Le tre funzioni sono rappresentate nella figura seguente.



L'area della regione di piano delimitata da r e la circonferenza si ottiene sottraendo all'area del quarto di cerchio quella del triangolo rettangolo di vertici $(0, 0)$, $(0, 3)$ e $(3, 0)$ ed è pari a $\frac{9}{4}\pi - \frac{9}{2} \simeq 2,57$.

L'area compresa fra L e r si calcola mediante integrale:

$$\int_0^3 (3 - x) - \left(\frac{3}{2} - \frac{x^2}{6}\right) dx = \frac{x^3}{18} - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x\Big|_0^3 = \frac{3}{2}.$$

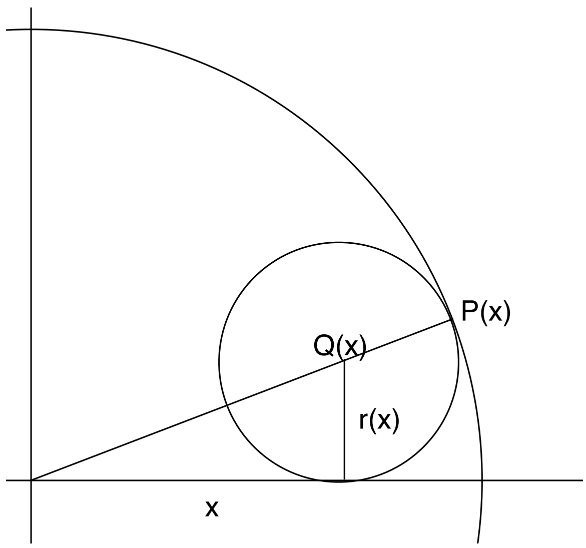
2. Mediante il principio degli indivisibili, si ha che il volume del solido W è pari all'integrale

$$\int_0^3 S(x)dx = \int_0^3 e^{5-3x}dx = \left.\frac{e^{5-3x}}{-3}\right|_0^3 = \frac{e^5 - e^{-4}}{3}.$$

3. Mediante la formula per il volume dei solidi di rotazione (si veda il punto quattro del problema 1), e ricordando che $r(x) \geq f(x)$ in $[0,3]$, si ottiene che il volume cercato è

$$\begin{aligned}\pi \int_0^3 r^2(x) - f^2(x)dx &= \pi \int_0^3 (3-x)^2 - \left(\frac{3}{2} - \frac{x^2}{6}\right)^2 dx \\ &= \pi \int_0^3 \frac{27}{4} - 6x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{36}x^4 dx \\ &= \left.\frac{27}{4}x - 3x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{180}\right|_0^3 \pi = \frac{27}{5}\pi.\end{aligned}$$

4. Osserviamo innantitutto il seguente fatto: dati due cerchi di cui uno tangente internamente all'altro, i centri dei cerchi e il punto di tangenza sono collineari. Sia allora $C(x)$ un cerchio tangente internamente all'arco AB in $P(x)$ e all'asse x in $(x,0)$. Siano $Q(x)$ e $r(x)$ rispettivamente il centro ed il raggio di $C(x)$.



Per l'osservazione iniziale, $Q(x)$ giace sul raggio del cerchio esterno passante per $P(x)$. Consideriamo il triangolo (rettangolo per la condizione di tangenza all'asse x) di vertici l'origine O, $Q(x)$ e $(x, 0)$: i cateti hanno lunghezza x e $r(x)$, mentre l'ipotenusa ha lunghezza $3 - r(x)$. Il teorema di Pitagora fornisce quindi

$$(3 - r(x))^2 = r^2(x) + x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 9 - 6r(x) = x^2$$

che, essendo $r(x)$ l'ascissa di $Q(x)$, è la relazione cercata $r(x) = f(x)$. Viceversa, il cerchio $C(x)$ di centro $Q(x) = (x, f(x))$ e raggio $f(x)$ è tangente all'asse delle ascisse qualsiasi sia $f > 0$. Esso è inoltre tangente alla circonferenza di raggio 3 perchè per il teorema di Pitagora il punto sulla retta $OQ(x)$ distante $f(x)$ da $Q(x)$ dista 3 dall'origine, e quindi giace sull'arco AB; per simmetria attorno alla retta $OQ(x)$ non vi sono altri punti d'intersezione, visto che due cerchi distinti si intersecano in al più in due punti.

La circonferenza cercata deve essere simmetrica attorno alla retta verticale passante per il punto di intersezione dei due archi di circonferenza. Per simmetria l'ascissa di tale punto deve essere $\frac{3}{2}$, ed essendo $f(\frac{3}{2}) = \frac{9}{8} = r(x)$, la circonferenza cercata ha centro $(\frac{3}{2}, \frac{9}{8})$ e raggio $\frac{9}{8}$.